Varianta 057

Subiectul I

a) $|z|=1$.

b) $OA=1$.

c) Deoarece $x_A^2+y_A^2=1$, punctul A aparține cercului de ecuație $x^2+y^2=1$.

d) Ecuația tangentei este $3x+4y-5=0$.

e) $V_{ABCO}=1$.

f) $\begin{cases} a=1 \\ b=-5 \end{cases}$.

Subiectul II

1.

a) Soluția este $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{3}\}$.

b) $n=5$.

c) $g(1)=0$.

d) $x\in\{-3, 0\}$.

e) $x_1+x_2+x_3=2$.

2.

a) $f'(x)=-\dfrac{10x}{(x^2+4)(x^2+9)}$, $\forall x\in \mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f'(x)\,dx=\ln\dfrac{8}{9}$.

c) Evident.

d) $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\dfrac{1}{5}$.

e) Se face tabelul de variație al funcției f şi rezultă concluzia.

Subiectul III

a) Evident

b) Se arată prin calcul direct.

c) $\begin{vmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{vmatrix}=z\overline{z}+w\overline{w}=|z|^2+|w|^2\in[0,\infty)$.

d) De exemplu, pentru matricea $X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, avem $XJ=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ şi

$JX = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, deci $XJ \neq JX$.

e) Considerăm $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in G$, $A \neq O_2$.

Se demonstrează prin reducere la absurd că A este inversabilă.

Mai mult, $A^{-1} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} \overline{\alpha} & -\beta \\ \overline{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \in G$, pentru $z = \frac{\overline{\alpha}}{d} \in \mathbf{C}$ şi $w = -\frac{\beta}{d} \in \mathbf{C}$.

f) Pentru orice $t \in \mathbf{R}$, avem $A_t = i \cdot \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \cdot \cos t & i \cdot \sin t \\ -\overline{i \cdot \sin t} & \overline{i \cdot \cos t} \end{pmatrix} \in G$

şi $A_t^2 = i^2 \cdot I_2 = -I_2$, aşadar ecuația $X^2 = -I_2$ are o infinitate de soluții în G.

g) Se arată uşor că $(G, +, \cdot)$ este un corp necomutativ.

Subiectul IV

a) $f'(x) = -\frac{x}{x+1}$, $\forall\, x > -1$.

b) $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 0$.

c) $f'(x) > 0 \iff -1 < x < 0$, aşadar f este strict crescătoare pe $(-1, 0]$ şi strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

d) Din **c)** deducem că $x = 0$ este punct de maxim global pentru f, deci $\forall\, x > -1$, $f(x) \leq f(0) \iff \forall\, x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

e) Pentru $x \geq 0$, avem $a + x \geq a > 0 \overset{x \geq 0}{\iff} \frac{x}{a+x} \leq \frac{x}{a}$.

Obținem: $0 < \frac{I_n}{n} = \int_0^1 \frac{x^n}{a+x^n}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{a}\,dx = \frac{1}{a(n+1)}$ şi trecând la limită şi aplicând criteriul cleştelui, rezultă $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{n} = 0$.

f) Se arată prin calcul direct.

g) Avem $0 < \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^n}{a}\right) dx \overset{\mathbf{d)}}{<} \int_0^1 \frac{x^n}{a}\,dx = \frac{1}{a(n+1)}$, şi trecând la limită şi aplicând criteriul cleştelui, obținem $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^n}{a}\right) dx = 0$.

Mai mult, din **f)** deducem că $\lim_{n\to\infty} I_n = \ln\frac{a+1}{a}$.